Méthode à deux niveaux et préconditionnement géométrique en contrôle optimal

Rémy Dutto

Composition du jury :

M. Alain RAPAPORT, Rapporteur, INRAE Occitanie-Montpellier
Mme Hasnaa ZIDANI, Rapporteure, INSA Rouen
M. Jean-Baptiste CAILLAU, Examinateur, Université Côte d'Azur
M. Michel POVLOVITSCH SEIXAS, Examinateur, Continental
M. Olivier COTS, Directeur de thèse, Toulouse INP
M. Mariano SANS, Co-directeur du monde socio-économique, Vitesco Technologies

Introduction

Contexte : Thèse CIFRE avec l'entreprise Vitesco Technologies

Motivation : Problème de répartition de couple des véhicules hybrides électriques

Objectif : Tendre vers des solutions embarquables

Cadre :

- Problème industriel complexe
- Combinaison de méthodes indirectes et d'intelligence artificielle
- Généralité des solutions proposées

Sommaire

Sommaire

Cycle

On considère un véhicule hybride électrique (HEV) sur un cycle donné : la vitesse du véhicule est connue.

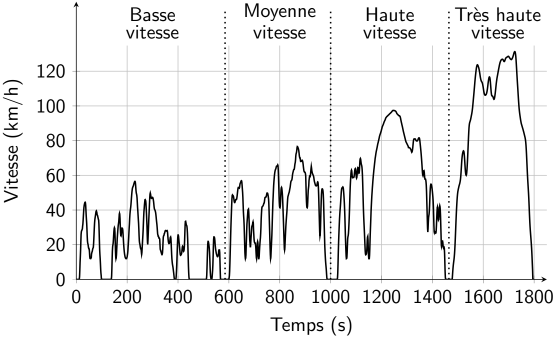


Figure – *Worldwide harmonized Light vehicles Test Cycle (WLTC).*

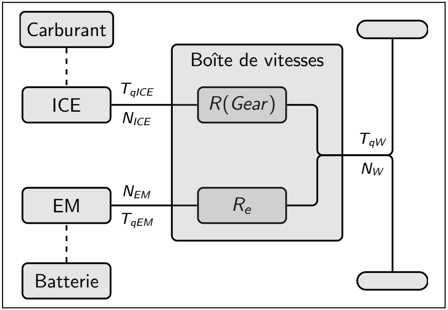
$\Rightarrow$ le couple $T_{qW}(\cdot)$ et la vitesse de rotation $N_W(\cdot)$ des roues sont connus.

Modèle statique du HEV

Entrées :

Nom	Description	Unité
Coût		
M	Consomation en carburant	g
État		
SOC	État de charge de la batterie	
Commandes		
$Gear$	Rapport de vitesse	
T_{qICE}	Couple du moteur thermique	N.m
Entrées provenant du cycle		
T_{qW}	Couple des roues	N.m
N_W	Vitesse de rotation des roues	RPM

Figure – Schéma du HEV.



Sorties : $\dot{M}$ et $S\dot{O}C$, où $\dot{}$ correspond à $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Problème de répartition de couple et du rapport de vitesse

Le problème de commande optimale étudié peut s'écrire :

$$(\text{OCP}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x,u} \int_{t_0}^{t_f} f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\,\mathrm{d}t, & \\ \text{s.c. } \dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), & t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ \qquad u(t) \in \mathrm{U}(t), & t \in [t_0, t_f], \\ \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_T, & \end{array} \right.$$

où :

- $x \in \mathrm{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R})$ correspond à l'*état SOC*,
- $u \in \mathrm{L}^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^2)$ correspond au *contrôle* $\big(T_{qICE}, Gear\big)$,
- les fonctions f^0 et f sont $\mathcal{C}^1$ en x et u,
- $\mathrm{U}(t) \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble non-vide fermé.

État de l'art

Plusieurs méthodes de résolution du problème de répartition de couple sont proposées dans la littérature :

- Méthodes à base de règles
- *Equivalent Consumption Management Strategy* (ECMS)
- Programmation dynamique
- Apprentissage par renforcement profond
- Méthodes indirectes

Sommaire

Principe du Maximum de Pontryagin

Si (x, u) est solution de (OCP) alors c'est la projection d'une *extrémale*

$$(x, p, p^0, u) \in \mathrm{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R}) \times \mathrm{AC}([t_0, t_f], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_- \times \mathrm{L}^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^2)$$

où $(p^0, p) \neq 0$, la dynamique hamiltonienne est satisfaite pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \nabla_p h\big(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\big), \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_x h\big(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\big), \end{cases}$$

tout comme la condition de maximisation pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$

$$h\left(t, x(t), p(t), p^0, u(t)\right) = \max_{w \in \mathrm{U}(t)} h\left(t, x(t), p(t), p^0, w\right),$$

où h est le *pseudo-hamiltonien* défini par

$$h(t, x, p, p^0, u) = p^0\ f^0(t, x, u) + p\ f(t, x, u).$$

Cadre indirect

On note $\exp_{\vec{h}}(t_2, t_1, z_1, p^0)$ la solution au temps t_2 du problème

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{h}\left(t, z(t), p^0, u(t)\right), & t \in [t_1, t_2] \text{ p.p.} \\ h\left(t, z(t), p^0, u(t)\right) = \max\limits_{w \in \mathrm{U}(t)} h\left(t, z(t), p^0, w\right), & t \in [t_1, t_2] \text{ p.p.} \\ z(t_1) = z_1, \end{cases}$$

où $\vec{h}$ est le champ de vecteur pseudo-hamiltonien, défini par

$$\vec{h}(t, x, p, p^0, u) = \left(\nabla_x h(t, x, p, p^0, u), -\nabla_p h(t, x, p, p^0, u)\right).$$

Hypothèse 1

La fonction (multi-valuée) $\exp_{\vec{h}}(t_2, t_1, x_1, p_1, p^0)$ *est une application, définie pour tout* $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq t_f$*, pour tout* $x_1 \in \mathbb{R}$ *et pour tout couple non trivial* $(p^0, p_1) \in \mathbb{R}^2$.

Idée principale de la méthode de tir simple

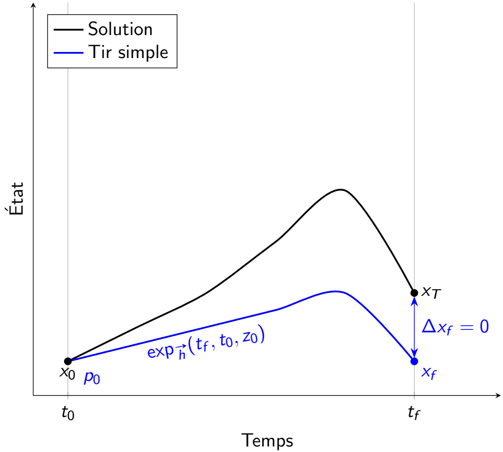


Figure – Illustration de la méthode de tir simple.

Méthode de tir simple

Le principe du maximum mène à la résolution de

$$(\text{TPBVP}) \qquad \begin{cases} \pi_x\big(\exp_{\vec{h}}(t_f, t_0, z_0, p^0)\big) = x_T, \\ \pi_x(z_0) = x_0, \quad p^0 \leq 0, \end{cases}$$

où $\pi_x(\cdot)$ est la projection sur l'espace d'état x.

L'objectif de la méthode de tir simple est de trouver un zéro non trivial (p^0, p_0) de la fonction de tir simple

$$\begin{array}{rccc} S & : & \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (p^0, p_0) & \longmapsto & \pi_x\big(\exp_{\vec{h}}(t_f, t_0, x_0, p_0, p^0)\big) - x_T \end{array}$$

Normalisations de la fonction de tir

Remarque (Homogénéité)

$$S(p^0, p_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall k > 0, \quad S(kp^0, kp_0) = 0.$$

On considère deux méthodes de normalisation de la fonction de tir S.

- Méthode 1 : si on suppose que les extrémales associées aux solutions de (OCP) sont normales ($p^0 < 0$), alors on peut fixer $p^0 = -1$ et considérer $S_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_1(p_0) = S(-1, p_0),$$

- Méthode 2 : sans supposer la normalité des extrémales, on peut fixer $\|(p^0, p_0)\|_2 = 1$ et considérer $S_2 \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_2(p) = S\big(\eta(p_0), p_0\big), \quad \text{où} \quad \eta(p_0) = -\sqrt{1 - p_0^2}.$$

Sommaire

Objectifs

Le problème étudié a été résolu par la méthode de tir simple.

On veut proposer une méthode de résolution qui permet d'obtenir le contrôle à appliquer de manière :

- plus rapide (temps de calcul),
- plus robuste (sensibilité),
- plus efficace (moins de calculs).

Figure – *Master controller.*

Idée principale de la méthode de tir multiple

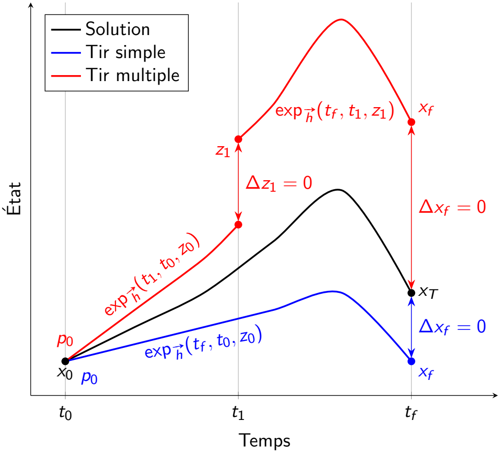


Figure – Illustration des méthodes de tir simple et multiple.

Méthode de tir multiple

L'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est décomposé en $[t_i, t_{i+1}], i \in \{0, \dots, N\}$, où $t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = t_f$.

Le problème (TPBVP) est transformé en

$$
\text{(MPBVP)} \qquad \begin{cases} z_{i+1} = \exp_{\vec{h}}(t_{i+1}, t_i, z_i, p^0), \quad p^0 \leq 0, \\ x_T = \pi_x\big(\exp_{\vec{h}}(t_{N+1}, t_N, z_N, p^0)\big), \quad \pi_x(z_0) = x_0. \end{cases}
$$

La fonction de tir multiple associée est définie par

$$
\left(p_0, z_1, \dots, z_N, p^0\right) \longmapsto \begin{pmatrix} \exp_{\vec{h}}\left(t_1, t_0, x_0, p_0, p^0\right) - z_1 \\ \exp_{\vec{h}}\left(t_2, t_1, z_1, p^0\right) - z_2 \\ \vdots \\ \exp_{\vec{h}}\left(t_N, t_{N-1}, z_{N-1}, p^0\right) - z_N \\ \pi_x\big(\exp_{\vec{h}}\left(t_{N+1}, t_N, z_N, p^0\right)\big) - x_T \end{pmatrix}.
$$

Cette fonction est connue pour être moins sensible que la fonction S.

Objectifs

Comparée à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple est

- ✓ plus rapide (parallélisation),
- ✓ plus robuste (réduction de sensibilité),
- ✗ aussi efficace (même nombre de calculs).

Objectif : proposer une méthode qui réduise aussi le nombre de calculs.

Méthode proposée : la méthode Macro-Micro.[1]

1. cf. [Cots et al., 2023a] pour plus d'information

Sommaire

Idée principale de la formulation à deux niveaux

Analogie : Course cycliste.

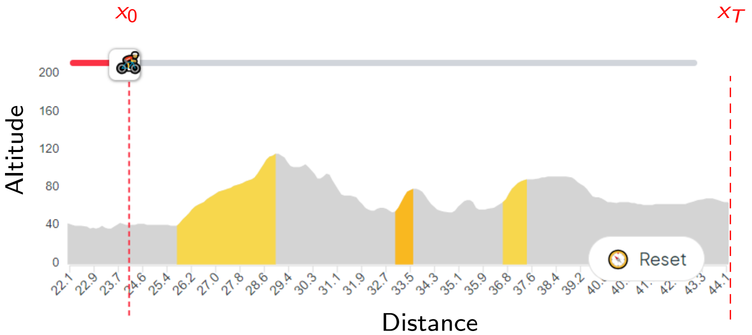


Figure – Partie de la course Paris-Roubaix. [2]

2. https://bikespot.fr/en/routes/1-paris-roubaix#readElevation

Idée principale de la formulation à deux niveaux

Analogie : Course cycliste.

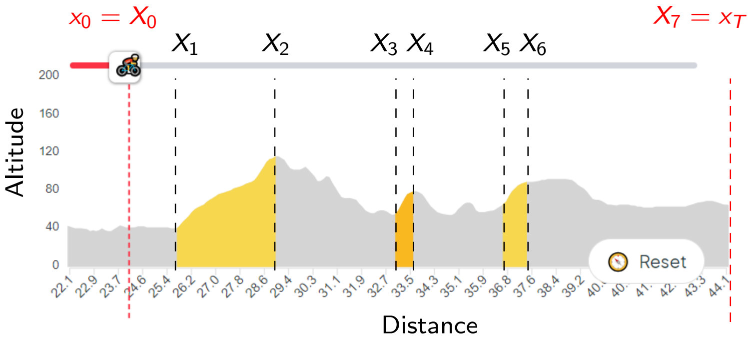


Figure – Partie de la course Paris-Roubaix. [2]

2. https://bikespot.fr/en/routes/1-paris-roubaix#readElevation

Décomposition à deux niveaux

En définissant pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$ les problèmes de commande optimale intermédiaires

$$
(\mathrm{OCP}_{i,a,b}) \quad \begin{cases} V_i(a, b) := \displaystyle\min_{x,u} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0\big(t, x(t), u(t)\big)\, \mathrm{d}t, & \\ \text{s.c. } \dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), & t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ p.p.}, \\ \qquad u(t) \in \mathrm{U}(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \qquad x(t_i) = a, \quad x(t_{i+1}) = b, & \end{cases}
$$

où V_i correspond à la *fonction valeur*, le problème (OCP) est équivalent à

$$
(\mathrm{BOCP}) \quad \begin{cases} \displaystyle\min_X V(X) := \sum_{i=0}^{N} V_i(X_i, X_{i+1}), \\ \text{s.c.} \quad X \in \mathcal{X}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{N+1} = x_T, \end{cases}
$$

où $\mathcal{X}$ est l'ensemble des états intermédiaires $X = \big(X_0, \ldots, X_{N+1}\big)$ admissibles.

Diagramme commutatif

Sous l'hypothèse 1 ($\exp_{\vec{h}}$ application) et si

- les BC-extrémales associées à (OCP) sont normales ($p^0 < 0$),
- la fonction V est différentiable à la solution de (BOCP),

alors le diagramme suivant est commutatif

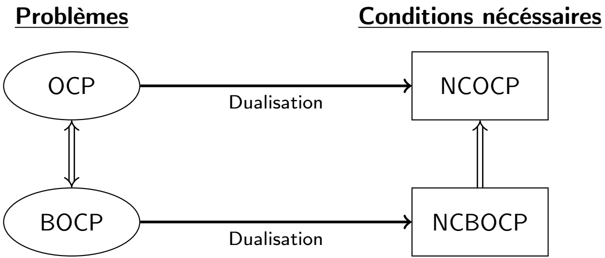


Figure – Diagramme de (OCP) à (NCOCP).

Résultat nécessaire

Pour prouver cette commutativité, on a besoin du résultat suivant

Proposition 1 (Bokanowski et al., 2021)

Sous les hypothèses considérées, si (x_i, u_i) *est une solution de* $(\mathrm{OCP}_{i,a,b})$*, avec* $(x_i, p_i, -1, u_i)$ *une BC-extrémale associée, alors*

$$\nabla_a V_i\big(x_i(t_i), x_i(t_{i+1})\big) = -p_i(t_i), \tag{1}$$

$$\nabla_b V_i\big(x_i(t_i), x_i(t_{i+1})\big) = p_i(t_{i+1}).$$

Bokanowski, O., Désilles, A., and Zidani, H. (2021). Relationship between maximum principle and dynamic programming in presence of intermediate and final state constraints. *ESAIM - Control Optim. Calc. Var.*

Idée principale de la méthode Macro-Micro

Supposons que les fonctions V_i sont a priori connues.
On doit résoudre

1. le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min\limits_{X} V(X) := \sum_{i=0}^{N} V_i\left(X_i, X_{i+1}\right), \\ \text{s.c. } X \in \mathcal{X}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{N+1} = x_T, \end{cases}$$

pour avoir les états intermédiaires optimaux $X^* = \left(X_0^*, \ldots, X_{N+1}^*\right)$,

Idée principale de la méthode Macro-Micro

Supposons que les fonctions V_i sont a priori connues.
On doit résoudre

1. le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min_X V(X) := \sum_{i=0}^{N} V_i\left(X_i, X_{i+1}\right), \\ \text{s.c. } X \in \mathcal{X}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{N+1} = x_T, \end{cases}$$

pour avoir les états intermédiaires optimaux $X^* = \left(X_0^*, \ldots, X_{N+1}^*\right)$,

2. les $N+1$ problèmes de commande optimale **indépendants**

$$\begin{cases} \min_{x,u} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t, \\ \text{s.c. } \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), & t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ p.p.}, \\ \qquad u(t) \in \mathrm{U}(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \qquad x(t_i) = X_i^*, \quad x(t_{i+1}) = X_{i+1}^*, \end{cases}$$

où $p^* = -\nabla_a V_i(X_i^*, X_{i+1}^*)$ est un zéro de S_1 (Équation (1)).

Approche proposée

L'approche proposée est basée sur les approximations C_i des fonctions valeurs V_i. On doit donc résoudre :

1. le problème d'optimisation suivant

$$(\text{Macro}) \qquad \begin{cases} \min\limits_{X} C(X) := \sum\limits_{i=0}^{N} C_i\left(X_i, X_{i+1}\right), \\ \text{s.c. } X \in \mathcal{X}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{N+1} = x_T, \end{cases}$$

pour avoir les états intermédiaires "optimaux" $\hat{X} = \left(\hat{X}_0, \ldots, \hat{X}_{N+1}\right)$,

Approche proposée

L'approche proposée est basée sur les approximations C_i des fonctions valeurs V_i. On doit donc résoudre :

1. le problème d'optimisation suivant

$$\text{(Macro)} \qquad \begin{cases} \min\limits_X C(X) := \sum\limits_{i=0}^{N} C_i\left(X_i, X_{i+1}\right), \\ \text{s.c. } X \in \mathcal{X}, \quad X_0 = x_0, \quad X_{N+1} = x_T, \end{cases}$$

pour avoir les états intermédiaires "optimaux" $\hat{X} = (\hat{X}_0, \ldots, \hat{X}_{N+1})$,

2. les $N+1$ problèmes de commande optimale **indépendants**

$$\text{(Micro)} \quad \begin{cases} \min\limits_{x,u} \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0\left(t, x(t), u(t)\right) \mathrm{d}t, \\ \text{s.c. } \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), & t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ p.p.}, \\ \qquad u(t) \in U(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \qquad x(t_i) = \hat{X}_i, \quad x(t_{i+1}) = \hat{X}_{i+1}, \end{cases}$$

où $p^* = -\nabla_a C_i(\hat{X}_i, \hat{X}_{i+1})$ n'est plus nécessairement un zéro de S_1.

Schéma de la méthode Macro-Micro

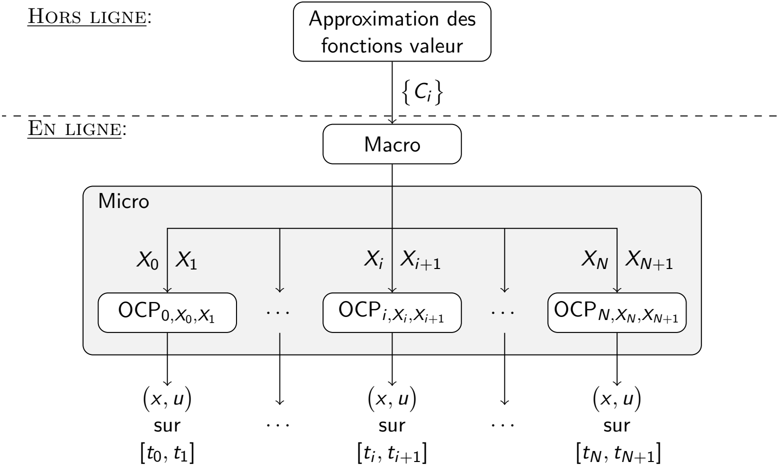


Figure – Schéma de la méthode Macro-Micro.

Schéma de la méthode Macro-Micro

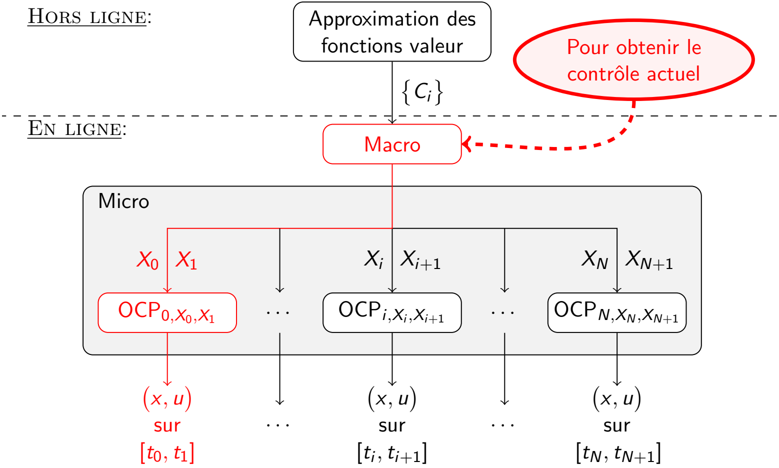


Figure – Schéma de la méthode Macro-Micro.

Construction des approximations des fonctions valeur

Pour tout $i \in \{0, \ldots N\}$, une base de données $\mathbb{D}_i$ d'évaluations de V_i est construite par une méthode efficace. [4]

Les fonctions C_i sont modélisées par des réseaux de neurones.

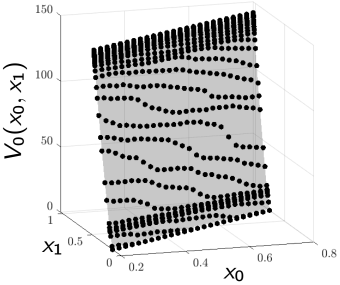


Figure – Base de données $\mathbb{D}_0$ et fonction C_0.

4. cf. [Cots et al., 2023b] pour plus d'information

Résultats

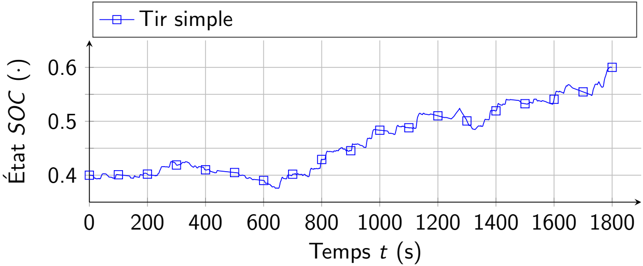


Figure – Trajectoire d'état.

Résultats

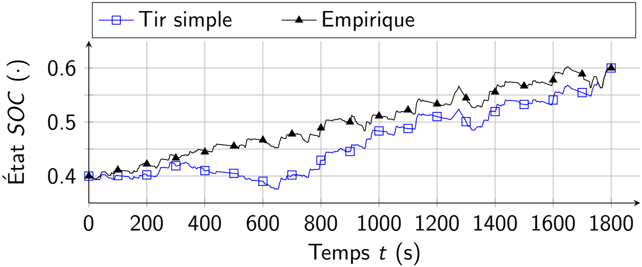


Figure – Trajectoires d'état.

La méthode Empirique est une méthode à deux niveaux où

$$C_i(a, b) = (b - a)^2.$$

Les états intermédiaires sont donnés par une interpolation linéaire entre l'état initial x_0 et final x_T aux temps intermédiaires.

Résultats

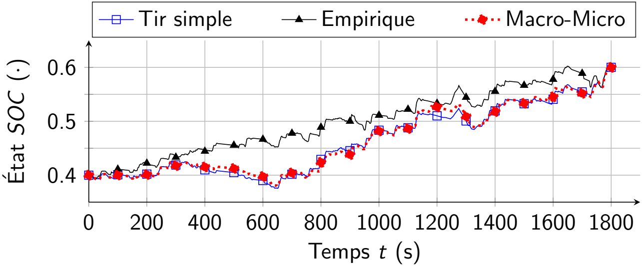


Figure – Trajectoires d'état.

La méthode Empirique est une méthode à deux niveaux où

$$C_i(a, b) = (b - a)^2.$$

Les états intermédiaires sont donnés par une interpolation linéaire entre l'état initial x_0 et final x_T aux temps intermédiaires.

Résultats

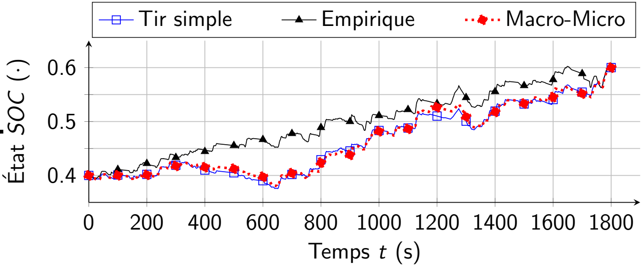


Figure – Trajectoires d'état.

x_0	x_T	Macro-Micro	Empirique
0.3	0.7	**0.42 / 0.045**	6.65/0.72
0.4	0.6	**0.34 / 0.039**	7.35/0.89
0.5	0.5	**1.00 / 0.129**	9.17/1.18
0.6	0.4	**1.71 / 0.244**	8.53/1.21
0.7	0.3	**0.91 / 0.143**	10.19/1.60
Moyenne		**0.88 / 0.120**	8.37/1.12

Table – Écart en coût (g/%).

Avantages

La méthode Macro-Micro :

- est $N+1$ fois plus rapide que la méthode de tir simple,
- a besoin de $N+1$ fois moins de calculs que les méthodes indirectes pour obtenir le contrôle actuel,
- a un faible écart de coût,
- est plus robuste avec l'initialisation naturelle donnée par (1).

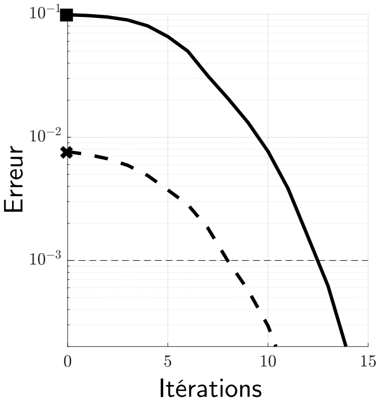


Figure – Evolution de $|S_1(\cdot)|$ en fonction du nombre d'itérations d'un solveur de type Newton (100 différents états initiaux et finaux, sur $[t_0, t_1]$).
—— : initialisation fixée $p = 500$ (■) - - - : initialisation naturelle p^* (✖)
--- : tolérance industrielle 10^{-3}

Sommaire

Objectifs

Objectif : réduire davantage le nombre d'itérations du solveur.

Idée principale [5] : méthode de préconditionnement géométrique de la fonction de tir simple basée sur

- une transformation du problème (OCP) en problème d'optimisation,
- une interprétation géométrique du co-état,
- la transformée de Mathieu.

5. cf. [Cots et al., 2024] pour plus d'information

Formulation augmentée

On considère une formulation augmentée du problème (OCP)

$$
\text{(AOCP)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\min_{\hat{x},u} x^0(t_f) \\ \text{s.c. } \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)) \qquad t \in [t_0, t_f] \text{ p.p.}, \\ \qquad u(t) \in \mathrm{U}(t) \qquad\qquad\qquad t \in [t_0, t_f], \\ \qquad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \quad x(t_f) = x_T, \end{cases}
$$

où $\hat{f} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ correspond au système augmenté défini par

$$
\hat{f}(t, \hat{x}, u) = \big(f^0(t, x, u), f(t, x, u)\big)
$$

et où l'état augmenté $\hat{x} = (x^0, x)$ correspond au couple coût-état, avec $\hat{x}_0 = (0, x_0)$.

Ensemble accessible et problème d'optimisation

On construit l'ensemble accessible du système augmenté $\mathcal{A}$ comme étant l'ensemble des états augmentés $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{f}}^0, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{f}})$ atteignable au temps final t_f.

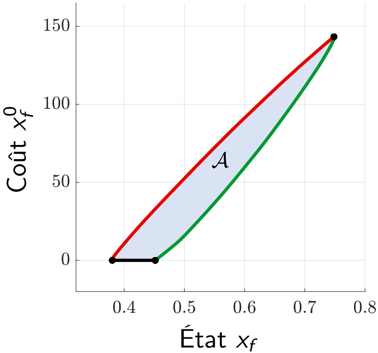


Figure – Ensemble accessible $\mathcal{A}$, sur $[t_0, t_1]$, avec $x_0 = 0.5$.

Le problème (AOCP) est équivalent au problème d'optimisation

$$(\mathrm{O}_x) \qquad \begin{cases} \min\limits_{\hat{x}_f} x_f^0, \\ \text{s.c. } \hat{x}_f \in \mathcal{A}, \\ \qquad x_f = x_T. \end{cases}$$

Interprétation géométrique du co-état

Proposition 2

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble convexe fermé, alors il existe une extrémale augmentée $(\hat{x}, \hat{p}, u)$ associée à une solution $(\hat{x}, u)$ de (AOCP) telle que

$$\hat{p}(t_f) \in N_{\mathcal{A}}(\hat{x}(t_f)).$$

Le co-état augmenté $\hat{p}$ associé à (AOCP) correspond à

$$\hat{p}(\cdot) = (p^0, p(\cdot)).$$

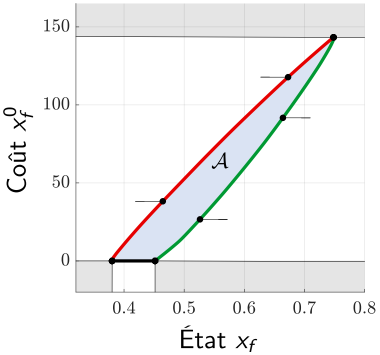


Figure – Ensemble accessible $\mathcal{A}$, sur $[t_0, t_1]$, avec $x_0 = 0.5$.

Diagramme commutatif

Cette proposition nous permet de montrer que si $\mathcal{A}$ est un ensemble convexe fermé, alors le diagramme suivant est commutatif.

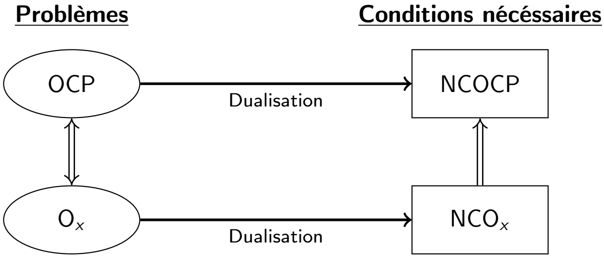


Figure – Diagramme de (OCP) à (NCOCP).

Changement de variable

Proposition 3

Soit ϕ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ effectuant le changement de variable

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} \underset{\phi^{-1}}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} y^0 \\ y \end{pmatrix} = \hat{y}.$$

et satisfaisant

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^0} = (k, 0), \quad \textit{avec} \quad k > 0, \tag{2}$$

alors (O_x) *est équivalent au problème*

$$(\mathrm{O}_y) \qquad \begin{cases} \min\limits_{\hat{y}_f} y_f^0, \\ \textit{s.c. } \hat{y}_f \in \phi(\mathcal{A}), \\ \qquad y_f = y_T := \phi(0, x_T). \end{cases}$$

Transformée de Mathieu

La transformée de Mathieu correspond au relèvement de ϕ en un difféomorphisme $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sur l'état/co-état augmenté, défini par

$$\Phi(\hat{x}, \hat{p}) = \left(\phi(\hat{x}), J_\phi(\hat{x})^{-\top} \hat{p}\right),$$

et préservant la dynamique hamiltonienne.

Ce difféomorphisme Φ transforme $(\hat{x}, \hat{p})$ en $(\hat{y}, \hat{q})$:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p} \end{pmatrix} \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{pmatrix}.$$

De plus, on note $\hat{y} = (y^0, y)$ et $\hat{q} = (q^0, q)$.

Diagramme commutatif

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble convexe fermé et ϕ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant (2) alors le diagramme suivant est commutatif.

Problèmes **Conditions nécéssaires**

$$
\begin{tikzcd}
\text{OCP} \arrow[r, "\text{Dualisation}"'] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{NCOCP} \\
\text{O}_x \arrow[r, "\text{Dualisation}"'] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{NCO}_x \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\text{O}_y \arrow[r, "\text{Dualisation}"'] & \text{NCO}_y
\end{tikzcd}
$$

Figure – Diagramme de (OCP) à (NCOCP).

Construction du changement de variable

Idée principale : faire passer une ellipse sur $\partial\mathcal{A}$ et en déduire le difféomorphisme linéaire $\phi(\hat{x}) = A\hat{x} + b$ qui transforme cette ellipse en cercle unité et qui satisfait l'équation (2).

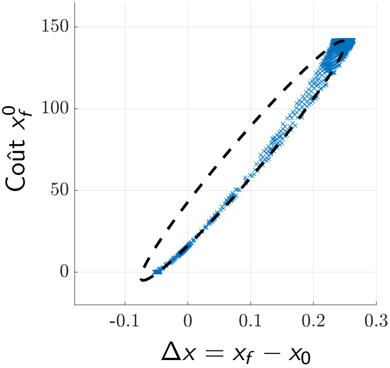


Figure – Coordonnées initiales

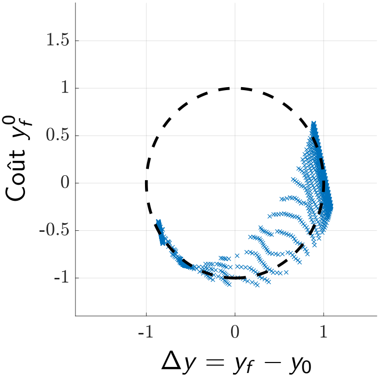


Figure – Nouvelles coordonnées

Construction du changement de variable

Idée principale : faire passer une ellipse sur $\partial\mathcal{A}$ et en déduire le difféomorphisme linéaire $\phi(\hat{x}) = A\hat{x} + b$ qui transforme cette ellipse en cercle unité et qui satisfait l'équation (2).

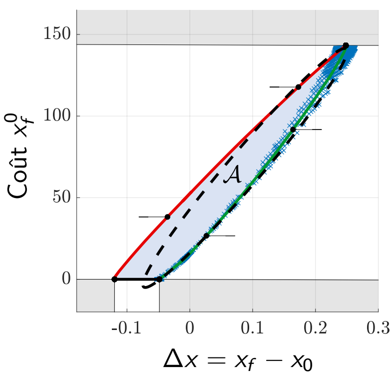


Figure – Coordonnées initiales

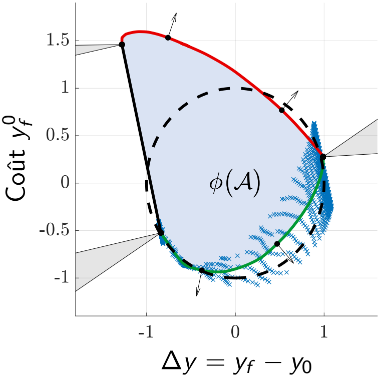


Figure – Nouvelles coordonnées

Définition des fonctions de tir

Dans les nouvelles coordonnées, la fonction de tir $T\colon \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$T(\hat{q}_0) = a_x S(A^\top \hat{q}_0),$$

où, grâce à l'équation (2) et au caractère affine de $\phi(\hat{x}) = A\hat{x} + b$,

$$A = \begin{bmatrix} k & a_{x^0} \\ 0 & a_x \end{bmatrix}.$$

La fonction de tir T est schématisée par

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\hat{q}_0} \arrow[r, "A^\top \hat{q}_0 = \hat{p}_0"] & \boxed{\hat{p}_0} \arrow[d, "x_f - x_T = S(\hat{p}_0)"'] \\
\boxed{y_f - y_T} & \boxed{x_f - x_T} \arrow[l, "y_f - y_T = a_x(x_f - x_T)"]
\end{tikzcd}$$

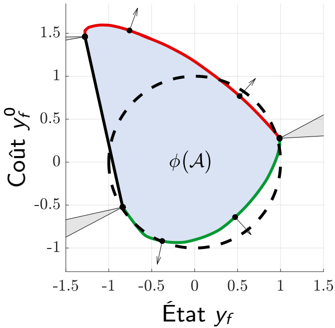
Les fonctions T_1 et T_2 sont définies à partir de T de la même manière que S_1 et S_2 à partir de S.

Nouvelles coordonnées

Proposition 4

Si $\phi(\mathcal{A})$ est le disque unité[6] alors la fonction de tir T_2 est donnée par

$$T_2(q_0) = q_0 - y_T.$$



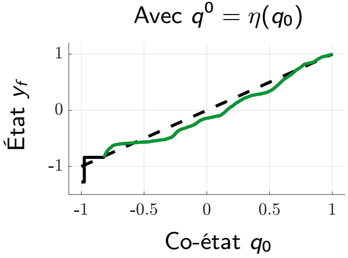


Figure – Nouvelles coordonnées, sur $[t_0, t_1]$, avec $x_0 = 0.5$.

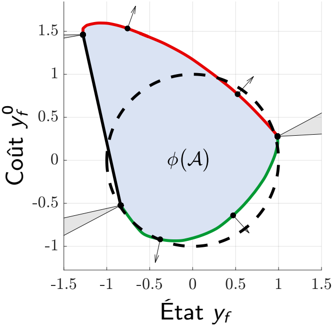
6. et sous une hypothèse supplémentaire cf. slide 49.

Nouvelles coordonnées

Proposition 4

Si $\phi(\mathcal{A})$ est le disque unité[6] *alors la fonction de tir T_2 est donnée par*

$$T_2(q_0) = q_0 - y_T.$$



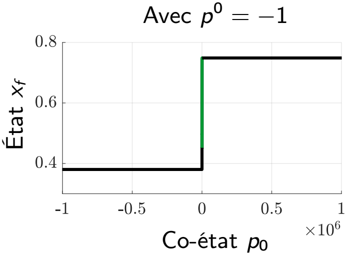


Figure – Coordonnées initiales, sur $[t_0, t_1]$, avec $x_0 = 0.5$.

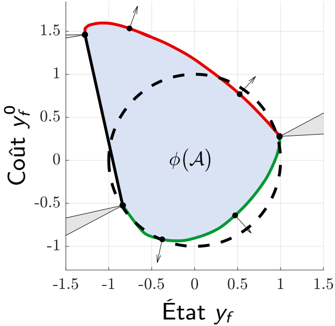
6. et sous une hypothèse supplémentaire cf. slide 49.

Nouvelles coordonnées

Proposition 4

Si $\phi(\mathcal{A})$ est le disque unité[6] *alors la fonction de tir T_2 est donnée par*

$$T_2(q_0) = q_0 - y_T.$$



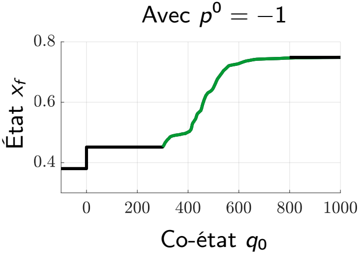


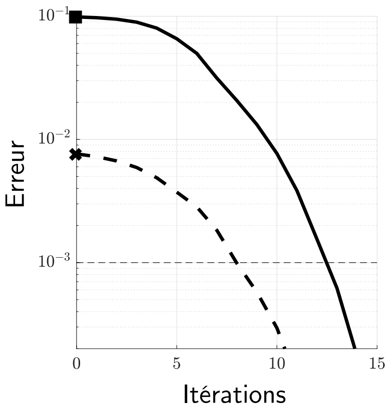
Figure – Coordonnées initiales, sur $[t_0, t_1]$, avec $x_0 = 0.5$.

6. et sous une hypothèse supplémentaire cf. slide 49.

Résultats

Figure – Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations (100 différents états initiaux et finaux, sur $[t_0, t_1]$).

Erreur \ Init	Fixée [7] ■	Naturelle ✖
$\lvert S_1(\cdot) \rvert$	——	- - -

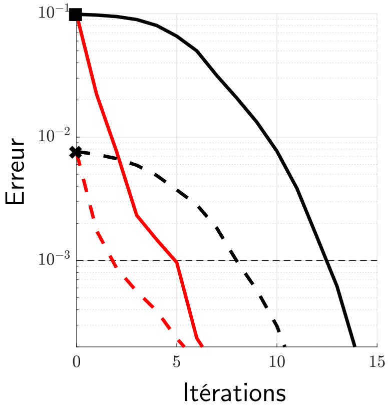


7. $p = 500$ pour S_1

Résultats

Figure – Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations (100 différents états initiaux et finaux, sur $[t_0, t_1]$).

Erreur \ Init	Fixée [7] ■	Naturelle ✖
$\lvert S_1(\cdot)\rvert$	——	- - -
Pour T_2	—— (rouge)	- - - (rouge)



L'erreur pour la fonction T_2 est calculée dans les coordonnées initiales.

7. $p = 500$ pour S_1 et $q = 0$ pour T_2.

Sommaire

Conclusion

Pour obtenir le contrôle actuel, on a proposé :

- la méthode **Macro-Micro :**
  - est $N+1$ fois plus rapide que la méthode de tir simple,
  - a besoin de $N+1$ fois moins de calculs que les méthodes indirectes,
  - a un faible écart de coût (<2g / <0.25%),
  - est plus robuste que les méthodes indirectes avec l'initialisation naturelle donnée par l'équation (1),
- la méthode de **préconditionnement géométrique :**
  - converge en seulement 2 itérations en moyenne,
  - n'a pas de coût de calcul supplémentaire,
  - n'est pas intrusive vis-à-vis du modèle,
  - est complémentaire avec la méthode Macro-Micro.

Perspectives

Généralisation pour tous les cycles : utilisation d'un réseau de neurones convolutif C.

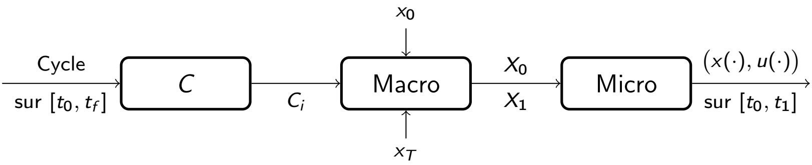


Figure – Schéma de la méthode proposée.

Perspectives

Généralisation pour tous les cycles : utilisation d'un réseau de neurones convolutif C.

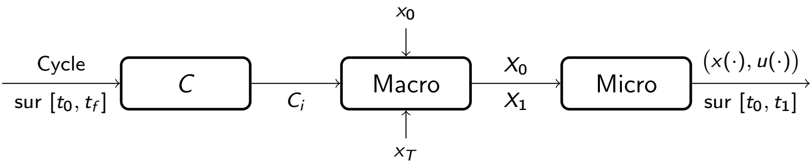


Figure – Schéma de la méthode proposée.

Pour aller encore plus loin : connaissance partielle du cycle + informations supplémentaires (GPS, feux de signalisation, habitudes conducteurs, . . .)

Publications et brevets

Publications :

Cots, O., Dutto, R., Jan, S., and Laporte, S. (2023a).
A bilevel optimal control method and application to the hybrid electric vehicle.
Submitted to Optim. Control Appl. Methods.

Cots, O., Dutto, R., Jan, S., and Laporte, S. (2023b).
Generation of value function data for bilevel optimal control method.
Proceeding accepted for the Thematic Einstein Semester 2023 conference.

Cots, O., Dutto, R., Jan, S., and Laporte, S. (2024).
Geometric preconditioner for indirect shooting and application to hybrid vehicle.
Proceeding accepted to the IFAC MICNON 2024 conference.

Brevets :

- 1 accepté sur la méthode à deux niveaux
- 2 en attente

Résultats

Figure – Évolution de l'erreur

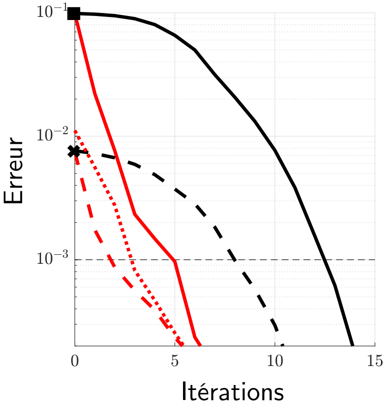
noir : $|S_1(\cdot)|$

rouge : pour $T_2(\cdot)$

en fonction du nombre d'itérations (100 différents états initiaux et finaux).

Initialisation :

- —— / —— : fixée (■) ($p = 500$ / $q = 0$)
- - - - / - - - : naturelle (✖)
- ····· : $q = y_f$



L'erreur pour la fonction T_2 est calculée dans les coordonnées initiales.

Définition des fonctions de tir, cas général

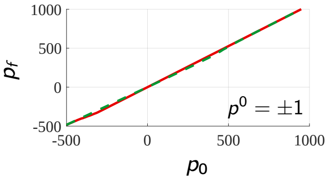
Dans le cas général, la fonction de tir $T \colon \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

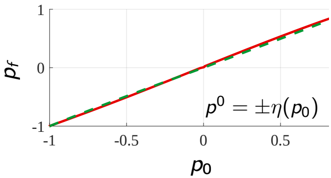
$$T(\hat{q}_f) = a_x (S \circ \hat{\varphi}_0)(A^\top \hat{q}_f),$$

où la fonction $\hat{\varphi}_0$ est une approximation de la fonction $\hat{p}_f \mapsto \hat{p}_0$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\hat{q}_f} \arrow[r, "A^\top \hat{q}_f = \hat{p}_f"] & \boxed{\hat{p}_f} \arrow[r, "\hat{\varphi}_0(\hat{p}_f) = \hat{p}_0"] & \boxed{\hat{p}_0} \arrow[d] \\
\boxed{y_f - y_T} & \boxed{x_f - x_T} \arrow[l, "y_f - y_T = a_x(x_f - x_T)"'] & \arrow[l, "x_f - x_T = S(\hat{p}_0)"']
\end{tikzcd}$$

Dans notre application, cette approximation correspond à l'identité :





Structure du problème (Macro)

On définit le Lagrangien L associée au problème (Macro) par

$$L(X) = C_0(x_0, X_1) + \sum_{i=1}^{N-1} C_i(X_i, X_{i+1}) + C_N(X_N, x_T),$$

où $X = (X_1, \dots, X_N)$. Si on suppose que les fonctions C_i sont $\mathscr{C}^2$, alors la matrice hessienne $\nabla^2 L(X)$ a la forme suivante

$$\nabla^2 L_\lambda(X) = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & & \vdots \\ 0 & * & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & 0 \\ \vdots & & \ddots & * & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Analyse de l'erreur

Pour N fixé, on note :

- $X^* = (X_0^*, \dots, X_{N+1}^*)$ la solution du problème (BOCP)
- $\hat{X} = (\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{N+1})$ la solution du problème (Macro).

Proposition 5

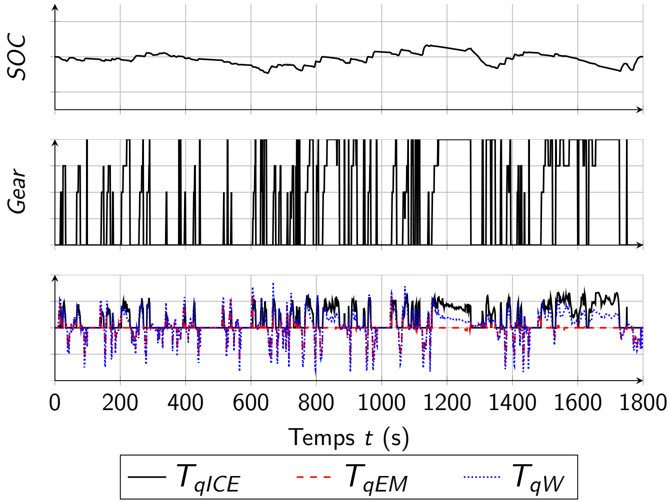
Étant donné $e > 0$, si pour tout (a, b) admissible

$$\max_{i \in \{0,\dots,N\}} \left| V_i(a, b) - C_i(a, b) \right| \leq \frac{e}{2(N+1)},$$

alors

$$\left| V(\hat{X}) - V(X^*) \right| \leq e.$$

Commande


SOC
Gear
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
Temps t (s)
T_{qICE}
T_{qEM}
T_{qW}

Serment

En présence de mes pairs.
Parvenu à l'issue de mon doctorat en mathématiques appliquées, et ayant ainsi pratiqué, dans ma quête du savoir, l'exercice d'une recherche scientifique exigeante, en cultivant la rigueur intellectuelle, la réflexivité éthique et dans le respect des principes de l'intégrité scientifique, je m'engage, pour ce qui dépendra de moi, dans la suite de ma carrière professionnelle quel qu'en soit le secteur ou le domaine d'activité, à maintenir une conduite intègre dans mon rapport au savoir, mes méthodes et mes résultats.